На правах рукописи

Ключев Вячеслав Валерьевич

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций ГОУ ВПО «Марийский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Михаил Юрьевич Кокурин
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Сергей Игоревич Пискарев; кандидат физико-математических наук, доцент Юрий Романович Агачев
Ведущая организация:	Институт Математики и Механики Уральского Отделения РАН, г.Екатеринбург

Защита состоится 4 февраля 2009 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, аудитория 324.

С текстом диссертации можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «   » декабря 2008 года

Ученый секретарь
Совета Д 212.081.10 Евгений Константинович
к. ф.-м. н., доцент Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Итерационные методы аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений в гильбертовых и банаховых пространствах являются объектом интенсивных исследований на стыке теории приближений, вычислительной математики и функционального анализа. Растущий интерес к данной группе средств приближения стимулируется расширяющимися запросами теории и практики решения различных классов некорректных задач, в частности, обратных задач математической физики и анализа. Формализация возникающих на практике некорректных задач как правило приводит к уравнениям, операторы которых не обладают свойствами регулярности в парах пространств, естественных с точки зрения постановок этих задач. В нелинейном анализе к классу нерегулярных относят операторы, производные которых не являются непрерывно обратимыми в выбранной паре пространств; уравнения с такими операторами называются нерегулярными. Классические итерационные методы решения нелинейных операторных уравнений, такие как градиентный метод, метод Ньютона–Канторовича, метод Гаусса–Ньютона, в нерегулярном случае нереализуемы, либо не сходятся к решению. К настоящему времени для указанных методов построен обширный массив регуляризованных модификаций, обладающих свойством сходимости, однако скорость их сходимости существенно определяется характеристиками искомого решения. Последнее обстоятельство аналогично взаимосвязи между гладкостью приближаемой функции и качеством ее наилучших полиномиальных аппроксимаций, устанавливаемой классическими прямыми и обратными теоремами теории приближения функций.

До последнего времени основные усилия исследователей упомянутых методов имели целью конструирование различных условий на искомое решение, достаточных для сходимости вырабатываемых итераций к решению с той или иной скоростью. В качестве этих условий обычно выступают требования истокообразной представимости решения. Утверждения такого рода являются аналогами классических прямых теорем теории приближения функций. Значительно меньшее внимание уделялось выяснению вопроса о необходимости данных условий и связанному с ним вопросу о неулучшаемости получаемых оценок скорости сходимости. Подобные утверждения играют роль обратных теорем в теории итерационной аппроксимации решений нерегулярных уравнений. Наиболее полно в отношении необходимых и достаточных условий сходимости изучены итерационные методы аппроксимации решений нерегулярных линейных и нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве (А.Б.Бакушинский, М.Ю.Кокурин; H.W.Engl, M.Hanke, A.Neubauer; T.Hohage). Методика этих исследований существенно связана с наличием в гильбертовом пространстве исчисления самосопряженных операторов, удобные аналоги которого в произвольном банаховом пространстве отсутствуют. Указанное обстоятельство определяет актуальность настоящего исследования, посвященного установлению необходимых и достаточных условий сходимости с различными скоростными характеристиками (квалифицированной сходимости) широких классов итерационных методов аппроксимации решений линейных и нелинейных уравнений с нерегулярными операторами в банаховом пространстве. В процессе исследования решаются две взаимосвязанные актуальные задачи: во-первых, известные в гильбертовом случае необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости обобщаются на случай нерегулярных уравнений в банаховом пространстве, и во-вторых — известные достаточные условия, гарантирующие сходимость с данной скоростью итерационных методов в банаховом пространстве, дополняются соответствующими необходимыми условиями. Параллельно решается задача пополнения теории итерационной аппроксимации решений нерегулярных уравнений в гильбертовом пространстве новыми необходимыми и достаточными условиями, относящимися к не изученным ранее классам оценок скорости сходимости.

Цель работы. Целью работы является получение необходимых и достаточных условий сходимости с данной скоростью для различных классов итерационных методов решения линейных и нелинейных нерегулярных операторных уравнений в банаховом и гильбертовом пространстве.

Методика исследования. Исследование проведено с использованием методов и результатов функционального анализа, связанных с исчислениями линейных операторов в банаховом и гильбертовом пространстве, с теорией полугрупп линейных операторов в банаховом пространстве, с теорией интерполяции банаховых пространств.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Впервые получены необходимые и достаточные условия сходимости с экспоненциальной скоростью для классов итерационных методов аппроксимации решений линейных и нелинейных нерегулярных операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

- Получены необходимые условия степенной сходимости для классов итерационных методов решения нерегулярных линейных и нелинейных операторных уравнений в банаховом пространстве, близкие к ранее известным достаточным условиям такой сходимости. Тем самым впервые установлено, что ранее известные теоремы о скорости сходимости этих методов неулучшаемы в существенном.

- Получены необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости для различных классов итерационных методов решения некорректной линейной задачи Коши в банаховом пространстве. В частности, известные в гильбертовом случае необходимые и достаточные условия логарифмической сходимости обобщены на случай банахова пространства.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории приближений в банаховом пространстве при изучении известных и вновь создаваемых итерационных процедур аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений. Практическая значимость работы заключается в том, что полученные в ней утверждения непосредственно применимы к большинству итерационных методов приближенного решения нерегулярных операторных уравнений, распространенных в вычислительной практике.

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на итоговых научных конференциях Марийского государственного университета (2001–2008), на международной молодежной научной школе–конференции «Лобачевские чтения–2002» (г.Казань), на шестой Казанской международной летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2003), на международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (г.Казань, 2004), на II Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (г. Воронеж, 2007), на Шестой молодежной научной школе–конференции «Лобачевские чтения–2007» (г.Казань), на научном семинаре кафедры теории функций и приближений КГУ (2008).

На защиту выносятся следующие результаты:

- Необходимые и достаточные условия выполнения экспоненциальной оценки скорости сходимости классов итерационных методов аппроксимации решений линейных и нелинейных нерегулярных операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

- Необходимые условия выполнения степенной оценки скорости сходимости классов итерационных методов аппроксимации решений линейных и нелинейных нерегулярных операторных уравнений в банаховом пространстве, близкие к ранее известным достаточным условиям такой сходимости.

- Достаточные и близкие к ним необходимые условия выполнения логарифмической оценки скорости сходимости для класса итерационных методов решения некорректной линейной задачи Коши в банаховом пространстве.

- Необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости для класса конечно–разностных методов аппроксимации решения некорректной линейной задачи Коши в банаховом пространстве.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 13 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата. Результаты совместных работ, представленные в диссертации, получены автором.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, подразделенных на 16 параграфов, и заключения. Список цитированной литературы содержит 99 наименований. Общий объем работы — 127 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обзор исследований, связанных с темой диссертации, обосновывается актуальность работы и вкратце описывается ее содержание.

Глава 1 посвящена необходимым и достаточным условиям квалифицированной сходимости для классов итерационных методов аппроксимации решений нерегулярных линейных и нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

В §1.1 представлен класс исследуемых методов аппроксимации решений нерегулярных уравнений в гильбертовом пространстве, сформулированы известные утверждения, определяющие необходимые и достаточные условия выполнения степенных и логарифмических оценок скорости сходимости этих методов. Пусть X_1, X_2 — гильбертовы пространства. Рассматривается уравнение

$$Ax = f, \quad f \in R(A) \tag{1}$$

с оператором $A \in L(X_1, X_2)$. Через $R(A)$ здесь и далее обозначается образ оператора A. Непрерывная обратимость A не предполагается, так что (1) относится к классу нерегулярных уравнений. Для аппроксимации решения x^*, ближайшего к выбранному элементу $\xi \in X_1$, применима известная параметрическая схема

$$x_\alpha = (E - \Theta(A^*A, \alpha)A^*A)\xi + \Theta(A^*A, \alpha)A^*f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2}$$

Здесь E — единичный оператор в пространстве X_1, порождающая функция $\Theta = \Theta(\lambda, \alpha)$ при любом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ измерима по Борелю на отрезке $[0, \|A^*A\|^2]$, а функция $\Theta(A^*A, \alpha)$ понимается в смысле исчисления самосопряженных операторов. Приведены известные условия на начальную невязку $x^* - \xi$, необходимые и достаточные для справедливости оценок $\|x_\alpha - x^*\| \leqslant C_1\alpha^p$ $(p > 0)$ или $\|x_\alpha - x^*\| \leqslant C_2(-\ln\alpha)^{-p}$ $(p > 0)$. Здесь и далее в автореферате символ $\|\cdot\|$ используется для единообразного обозначения норм различных пространств. Наряду с (1) рассматривается уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in X_1. \tag{3}$$

Считается, что $F : X_1 \to X_2$ — нелинейный оператор, действующий в паре гильбертовых пространств X_1, X_2, и дифференцируемый по Фреше в окрестности $\Omega_R(x^*) = \{y \in X_1 : \ \|y - x^*\| \leqslant R\}$ решения x^* уравнения (3). Предполагается выполненным условие Липшица

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega_R(x^*). \tag{4}$$

Нерегулярность уравнения (3) означает, что в любой окрестности решения x^* существуют точки x, для которых оператор $F'^*(x)F'(x)$ не является непрерывно обратимым. Исследуется известный итерационный процесс $x_0 \in X_1$,

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)(F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)), \tag{5}$$

получаемый применением схемы (2) к линеаризованному уравнению $F(x_n) + F'(x_n)(x-x_n) = 0$. Здесь $\alpha_{n+1} \in (0, \alpha_n], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$

Приведены примеры порождающих функций Θ для схем (2) и (5), соответствующие наиболее распространенным в вычислительной практике методам аппроксимации решений задач (1) и (3). Особое внимание в работе уделяется итерационным методам с порождающими функциями вида

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^{-1}\Big(1 - (1-\lambda g(\lambda))^{1/\alpha}\Big), & \lambda \neq 0, \\ g(0)\alpha^{-1}, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha \in \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. В частности, рассматриваются простейшие явный и неявный итерационные методы, для которых соответственно $g(\lambda) = \mu_0$ и $g(\lambda) = (\lambda + \mu_0)^{-1}$ $(\mu_0 > 0)$.

В §1.2 для схемы (2) установлены необходимые и достаточные условия, соответствующие не изучавшемуся ранее случаю быстрой (экспоненциальной по параметру α) сходимости приближений к решению. Получены условия на порождающую функцию Θ, при выполнении которых имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.2.4. *Пусть приближения x_α получены по схеме (2) и имеет место истокообразное представление*

$$x^* - \xi \in R\left(\exp\left(-p(A^*A)^{-1}\right)\right), \quad p > 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|x_\alpha - x^*\| \leqslant l \exp(-k\sqrt{p/\alpha}), \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \quad k = k(\Theta). \tag{7}$$

Теорема 1.2.5. *Пусть для приближений x_α, вырабатываемых схемой (2), справедлива оценка (7). Тогда имеет место истокообразное представление*

$$x^* - \xi \in R\left(\exp(-k\sqrt{\nu}(A^*A)^{-1/2})\right) \quad \forall \nu \in (0, p).$$

Условиям теорем 1.2.4 и 1.2.5 удовлетворяют многие методы аппроксимации решения уравнения (1), в т.ч. методы вида (2), (6).

В §1.3 изучаются необходимые и достаточные условия сходимости итераций (5) с экспоненциальной по α_n скоростью. Полученные здесь результаты аналогичны теоремам из §1.2, относящимся к линейному случаю. При соответствующих условиях на функцию Θ справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.3.1. *Существуют такие постоянные C_3–C_5, зависящие лишь от Θ и F, что если имеет место соотношение (4), приближения x_n определены согласно (5) и выполняются условия*

$$\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) = r < \infty, \tag{8}$$

$$\|x_0 - x^*\| \leqslant l \exp(-k\sqrt{p/\alpha_0}),$$
$$0 < l \leqslant \min\left\{C_3 k\sqrt{p}L^{-1}\exp(-kr\sqrt{p}),\ R\exp(k\sqrt{p/\alpha_0})\right\},$$
$$x^* - \xi = \exp(-p(F'^*(x^*)F'(x^*))^{-1})v, \quad p > 0, \quad v \in X_1,$$
$$\|v\| \leqslant d = \min\left\{C_4 l \exp(-kr\sqrt{p}),\ C_5 L^{-1}\exp(-kr\sqrt{p})\right\},$$

то справедлива оценка

$$\|x_n - x^*\| \leqslant l \exp(-k\sqrt{p/\alpha_n}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = k(\Theta). \tag{9}$$

Теорема 1.3.2. *Пусть выполняются соотношение (8) и для приближений x_n, вырабатываемых согласно (5), справедлива оценка (9). Тогда имеет место истокообразное представление*

$$x^* - \xi \in R\left(\exp\left(-k\sqrt{\nu}(F'^*(x^*)F'(x^*))^{-1/2}\right)\right) \quad \forall \nu \in (0,\, p).$$

Условия теорем 1.3.1 и 1.3.2 выполняются для многих процедур вида (5), в том числе для процедур с порождающими функциями (6).

В §1.4 проводится обсуждение результатов главы 1 в сравнении с аналогичными известными утверждениями.

В **главе 2** исследуются схемы аппроксимации решений нерегулярных линейных и нелинейных уравнений в банаховом пространстве, аналогичные (2) и (5). В §2.1 описаны исследуемые методы аппроксимации. Рассматривается уравнение

$$Ax = f, \quad f \in X, \tag{10}$$

где X — банахово пространство. Оператор $A \in L(X)$ не предполагается непрерывно обратимым, так что уравнение (10) является нерегулярным. Для аппроксимации решения уравнения (10) применима общая схема

$$x_\alpha = (E - \Theta(A,\alpha)A)\xi + \Theta(A,\alpha)f, \quad \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{11}$$

Функции ограниченных операторов вида $\Theta(A,\alpha)$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$ в (19) понимаются в смысле операторного исчисления Рисса–Данфорда. Через $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ обозначаем резольвенту A и полагаем $K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg\lambda| < \varphi_0\} \cup \{0\}$; E — единичный оператор в X. Предполагается, что оператор A удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие $\mathcal{A}$. *Для некоторого $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ имеют место соотношения*

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad \|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{C_6}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0).$$

Пусть функция $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитична в окрестности спектра $\sigma(A)$ оператора A, контур Γ лежит в этой окрестности и окружает $\sigma(A)$. Функция $\varphi(A) \in L(X)$ оператора A определяется равенством

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\lambda)R(\lambda, A)\,d\lambda. \tag{12}$$

В силу нерегулярности уравнения (10), получение оценок качества аппроксимации его решения приближениями (11) возможно лишь при наложении на искомое решение дополнительных условий типа требований повышенной гладкости. Ранее в работах А.Б.Бакушинского и М.Ю.Кокурина была исследована связь условия истокопредставимости $x^* - \xi \in R(A^p),\ p > 0$ и скорости сходимости отдельных процессов (11) к решению x^*. Было установлено, что для ряда методов вида (11) указанное включение влечет степенную оценку скорости сходимости $\|x_\alpha - x^*\| \leqslant C_7\alpha^p, \alpha \in (0, \alpha_0]$, а из последней в свою очередь вытекает

$$x^* - \xi \in R(A^q) \quad \forall q \in (0, p). \tag{13}$$

Оставался открытым вопрос о необходимости соотношения (13) для выполнения упомянутой степенной оценки в случае итерационных методов аппроксимации (11) с порождающими функциями вида (6). Поскольку для функции $\varphi(\lambda) = \lambda^p$ условия применимости формулы (12), вообще говоря, не выполняются, для оператора A^q в условии (13) используется представление Балакришнана

$$A^\mu = \frac{\sin \pi\mu}{\pi} \int\limits_0^\infty t^{\mu-1}(tE + A)^{-1}A dt, \quad \mu \in (0,\ 1).$$

Для $\mu \geqslant 1$ полагают $A^\mu = A^{[\mu]} \cdot A^{\mu-[\mu]}$ ($[\mu]$ есть целая часть μ, $A^0 \equiv E$).

Второй объект исследования в главе 2 — методы аппроксимации решений нерегулярных нелинейных уравнений вида

$$F(x) = 0, \quad x \in X, \tag{14}$$

где оператор F действует из банахова пространства X в X. Пусть x^* — искомое решение уравнения (14). Считается, что F дифференцируем по Фреше в окрестности точки x^*, и в этой окрестности выполняется условие Липшица (4). Изучается следующая известная группа методов, получаемая линеаризацией (14) и применением к линеаризованному уравнению схемы (11):

$$x_0 \in X, \quad x_{n+1} = \xi - \Theta(F'(x_n), \alpha_n)(F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)). \tag{15}$$

Здесь $\alpha_n > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Предполагается, что оператор $A = F'(x^*)$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}$. Как и в случае линейного уравнения, для схемы (15) ранее были установлены необходимые и достаточные условия сходимости приближений со степенной скоростью, за исключением необходимых условий для случая итерационных методов с порождающими функциями вида (6). В §§2.2, 2.3 получены необходимые условия степенной (по α и α_n) сходимости приближений (11) и (15) с такими порождающими функциями.

Основным результатом в §2.2 является следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Пусть при фиксированных* A, f, ξ *и заданного* $p > 0$ *выполняется оценка*

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leqslant C_8 n^{-p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

где приближения $x^{(n)} = x_\alpha, \alpha = 1/n$ *определены в (11), (6). Предположим, что выполняется условие* $\mathcal{A}$ *при* $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$. *Пусть также* $\mu_0 \in (0, C_9\|A\|^{-1})$, $C_9 \in \Big(0, (3 - \sqrt{25 - 16\sqrt{2}})/2\Big)$ *в случае* $g(\lambda) = \mu_0$ *и* $\mu_0 > 0$ *произвольно в случае* $g(\lambda) = (\lambda + \mu_0)^{-1}$. *Тогда начальная невязка допускает истокообразное представление*

$$x^* - \xi \in R\left(A^q\right) \quad \forall q \in (0, p). \tag{17}$$

Эта теорема дополняет следующее известное утверждение, устанавливающее достаточное условие выполнения (17).

Теорема 2.1.1. *Пусть оператор* A *в (10) удовлетворяет условию* $\mathcal{A}$ *и при некотором* $p > 0$ *имеет место представление*

$$x^* - \xi \in R(A^p). \tag{18}$$

1) Предположим, что $0 < \mu_0 < C_{10}\|A\|^{-1}$, $C_{10} \in (0, \min\{1, 2\cos\varphi_0\})$. *Тогда для приближений* $x^{(n)} = x_\alpha$, $\alpha = 1/n$, *определяемых (11), (6) с функцией* $g(\lambda) = \mu_0$, *справедлива оценка (16).*

2) Пусть $\mu_0 > 0$. *Тогда для приближений (11), (6) с функцией* $g(\lambda) = (\lambda + \mu_0)^{-1}$ *справедлива оценка (16).*

Показатели степени оператора A в условиях (17) и (18) сколь угодно близки, поэтому необходимое условие для выполнения оценки (16) близко к достаточному, а требование (18) не может быть существенно ослаблено. В то же время, уже в гильбертовом пространстве известны примеры, в которых условие (18) не является необходимым для выполнения оценки (16). Таким образом, утверждения теорем 2.1.1 и 2.2.1 в существенном неулучшаемы.

В §2.3 проведено аналогичное исследование для итераций (15) с порождающими функциями вида (6). Доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняется соотношение (4), оператор* $F'(x^*)$ *удовлетворяет условию* $\mathcal{A}$ *при* $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$, *и аппроксимации решения уравнения (14) строятся по схеме (15) с порождающей функцией (6) при* $g(\lambda) = \mu_0$ *или при* $g(\lambda) = (\lambda + \mu_0)^{-1}$. *Если для приближений* $\{x_n\}$ *при* $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ *имеет место оценка* $\|x_n - x^*\| \leqslant C_{11} n^{-p}$, *то для любого* $q \in (0, p)$ *справедливо*

$$x^* - \xi \in R\left(F'(x^*)^q\right).$$

Это утверждение дополняет ранее известный достаточный критерий $x^* - \xi \in R(F'(x^*)^p)$ выполнения оценки $\|x_n - x^*\| \leqslant C_{11} n^{-p}$ и устанавливает невозможность его существенного ослабления.

Более медленная логарифмическая скорость сходимости приближений к точному решению естественным образом возникает в важном частном случае, представленном некорректной задачей Коши для абстрактного параболического уравнения. В §2.4 приводятся необходимые сведения о задаче Коши для абстрактного линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — замкнутый неограниченный оператор в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$, плотной в X. Рассматривается уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0 \tag{19}$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0 \in X. \tag{20}$$

Под решением задачи (19), (20) понимается функция $y : [0, T] \to X$, непрерывная на $[0, T]$, непрерывно дифференцируемая на $(0, T]$, удовлетворяющая уравнению (19) при $t \in (0, T]$ и равенству (20). Известно, что если оператор A удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, то задача Коши (19), (20) корректна и ее решение имеет вид $y(t) = U(t)y_0,\ t \in [0, T]$, где $U(t) = \exp(-tA)$ — аналитическая полугруппа линейных операторов, генератором которой является оператор $(-A)$. Если же в дополнение к уравнению (19) известно значение $y(T) = f$, а требуется определить элемент $u = y(0)$, то приходим к некорректной задаче Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = f, \tag{21}$$

$x(t) = y(T - t)$, $t \in [0, T]$. Последняя сводится к линейному нерегулярному операторному уравнению

$$Bu = f, \quad B = \exp(-TA). \tag{22}$$

В §2.5 устанавливается достаточное условие логарифмической сходимости для класса методов аппроксимации (11) в применении к уравнению (22). Предполагается, что оператор A удовлетворяет следующему усиленному условию секториальности.

Условие $\mathcal{B}$. *Существуют постоянные $\varphi_0, \psi_0 \in [0, \pi/2)$ и $a > 0$ такие, что*

$$\sigma(A) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \frac{\psi_0}{T},\ \mathrm{Re}\lambda \geqslant a \right\} \subset K(\varphi_0),$$

и выполняется оценка $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \dfrac{C_{12}}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash K(\varphi_0)$.

При выполнении нежестких условий на функцию Θ, которым, в частности, удовлетворяют порождающие функции вида (6), справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. *Пусть решение u^* уравнения (22) таково, что имеет место истокообразное представление*

$$u^* - \xi \in R(A^{-p}). \tag{23}$$

Тогда для приближений u_α, построенных по схеме

$$u_\alpha = (E - \Theta(B,\alpha)B)\xi + \Theta(B,\alpha)f, \quad B = \exp(-TA), \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{24}$$

имеет место оценка

$$\|u_\alpha - u^*\| \leqslant C_{13}(-\ln\alpha)^{-p} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{25}$$

Включение (23) является аналогом условия логарифмической истокопредставимости $u^* - \xi = (-\ln B)^{-p}v$, $v \in X$, которое ранее применялось для получения оценок вида (25) в случае гильбертова пространства X (T.Hohage и др.).

В §2.6 с использованием методов теории интерполяции банаховых пространств устанавливается, что условие (23) близко к необходимому для выполнения оценки (25). Именно, при выполнении условия $\mathcal{B}$ и при соответствующих ограничениях на функцию Θ, которым удовлетворяют, например, порождающие функции вида (6), установлена следующая теорема.

Теорема 2.6.1. *Пусть приближения u_α построены по схеме (24) и справедлива оценка (25). Тогда имеет место истокообразное представление*

$$u^* - \xi \in R\left(A^{-q}\right) \quad \forall q \in (0, p).$$

Показатели степени оператора A в теоремах 2.5.1 и 2.6.1 сколь угодно близки, поэтому условие (23) практически является необходимым и достаточным для выполнения оценки (25).

В §2.7 показано, что если A является дифференциальным оператором высокого порядка, порождающим вместе с граничными условиями регулярно–эллиптическую задачу, то условие (23) эквивалентно требованию принадлежности элемента $y(0) - \xi$ подходящему пространству типа Соболева–Бесова. Приведены условия на коэффициенты дифференциального оператора A, при выполнении которых реализуются условия теорем из §§2.5 и 2.6.

В §2.8 проводится сравнение результатов главы 2 с аналогичными известными результатами других авторов.

Глава 3 посвящена исследованию необходимых и достаточных условий сходимости еще одного класса итерационных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши. В основе конструкции этих методов лежит техника разностной аппроксимации уравнения по времени.

В §3.1 описан класс конечно-разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши (21), где общие требования на оператор A те же, что и в §2.4, условие секториальности принимается в виде условия $\mathcal{A}$. Предполагается, что для данного элемента f существует решение $x = x(t)$ задачи Коши (21) в указанном выше смысле. Рассматривается следующий класс разностных схем аппроксимации функции $x = x(t)$, $t \in [0,\,T]$:

$$\sum_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu x_{n+\nu} = \Delta t \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu A x_{n+\nu}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k, \quad \Delta t = \frac{T}{N}; \qquad (26)$$
$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{k-1} = f.$$

Здесь $N, k \in \mathbb{N}$, а α_ν, β_ν $(0 \leqslant \nu \leqslant k)$ — вещественные параметры, выбор которых определяет конкретную разностную схему. Первые исследования методов аппроксимации вида (26) были выполнены С.Г.Крейном, О.И.Прозоровской, А.Б.Бакушинским в 60–70–х годах прошлого века, впоследствии эти исследования были дополнены результатами Н.Ю.Бакаева, С.И.Пискарева и других авторов. Схемы (26) получаются формальным применением к бесконечномерной задаче (21) известной процедуры конструирования конечно-разностных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Параграф завершается выводом необходимых интегральных представлений решения $x = x(t)$ и приближений $x_n \approx x(n\Delta t)$, $k \leqslant n \leqslant N$.

В §3.2 устанавливаются условия, достаточные для выполнения различных оценок скорости сходимости приближений x_n к точному решению. При выполнении ряда условий на коэффициенты схемы (26) и на свойства задачи (21) справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.2.1. *Пусть приближения к решению $x(t)$, $t \in [0, T]$ задачи (21) строятся по схеме (26) и имеет место истокообразное представление*

$$x(T) \in R(A^{-p}), \quad p > 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_{14}(-\ln \Delta t)^{-p}; \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon).$$

Теорема 3.2.2. *Предположим, что приближения к решению $x(t)$ задачи (21) на отрезке $[0,\,T]$ строятся по схеме (26) и решение (21) существует на отрезке $[0, T_1]$, где $T_1 > aT$ $(a > 1)$. Тогда для любого $q \in (0, p)$ с величиной p, зависящей от коэффициентов в (26) и величин T, T_1, имеет место оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_{15}(\Delta t)^q; \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon). \qquad (27)$$

Постоянная $C_{15} = C_{15}(q)$ не зависит от n, Δt.

В §3.3 с использованием техники интерполяции банаховых пространств доказывается утверждение о необходимых условиях выполнения оценки (27).

Теорема 3.3.1. *Пусть приближения к решению задачи (21), определяемые согласно (26), удовлетворяют оценке (27) с некоторым $q \in (0,\ 1)$. Тогда имеет место включение*

$$x(T) \in R\left(A^{-\widetilde{q}}\right) \quad \forall \widetilde{q} \in\ (0, q).$$

В §3.4 обсуждаются результаты главы 3. Отмечается, что реализации схемы (26) приводят к различным мультипликативным представлениям решения $x = x(t)$ некорректной задачи (21), аналогичным представлению Поста–Уиддера $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t}\, R\left(\frac{n}{t},\, A\right)\right]^n f$, имеющему место в корректном случае.

В **заключении** перечислены результаты работы, выносимые на защиту.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кокурин, М.Ю. Необходимые условия сходимости с данной скоростью итерационных методов решения линейных некорректных операторных уравнений в банаховом пространстве/ М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2002. – Т.5, №4. – С.295–310.

2. Кокурин, М.Ю. Необходимые условия степенной сходимости одного класса итерационных процессов для нелинейных некорректных операторных уравнений в банаховом пространстве / М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – Т.3, раздел 1. – С. 93–109. (http:/www.srcc.msu.su/num - meth/)

3. Ключев, В.В. Об одном классе методов решения обратной задачи Коши для абстрактного параболического уравнения / В.В. Ключев // Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т.18. Лобачевские чтения – 2002: Материалы международной молодежной научной школы-конференции. – Казань: Изд–во Казанского математического общества, 2002. – С.42–43.

4. Ключев, В.В. Необходимые и достаточные условия экспоненциальной сходимости класса итерационных методов для нерегулярных уравнений / В.В. Ключев, М.Ю. Кокурин // Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т.19. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы шестой Казанской международной летней школы–конференции. – Казань: Изд–во КГУ, 2003. – С.119–120.

5. Кокурин, М.Ю. О логарифмических оценках скорости сходимости методов решения обратной задачи Коши в банаховом пространстве / М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев// Известия вузов. Математика. – 2004. – №3. – С.73–75.

6. Ключев, В.В. Необходимое условие медленной сходимости класса методов решения обратной задачи Коши в банаховом пространстве / В.В. Ключев// Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского. Казанское математическое общество. Актуальные проблемы математики и механики. Материалы международной научной конференции. – Казань: Изд–во Казанского математического общества, 2004. – С.140–141.

7. Ключев, В.В. О необходимых условиях медленной сходимости класса методов решения обратной задачи Коши в банаховом пространстве / В.В. Ключев// Известия вузов. Математика. – 2005. – №8. – С.78–81.

8. Бакушинский, А.Б. Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве / А.Б. Бакушинский, М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев // Вычислительные методы и программирование. – 2006. – Т.7. – С.163–171.

9. Ключев, В.В. Необходимые и достаточные условия логарифмической сходимости методов решения обратной задачи Коши в банаховом пространстве / В.В. Ключев // Тихонов и современная математика: Обратные и некорректно поставленные задачи: Международная конференция, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 19–25 июня 2006 г.: Тез. докл. секции №4. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им.М.В. Ломоносова, 2006. – С.36–37.

10. Kokurin, M. Necessary and sufficient conditions for logarithmic convergence of regularization methods for solving inverse Cauchy problem in Banach space / M. Kokurin and V. Kljuchev // Journal of Inverse and Ill–Posed Problems. – 2006. – V.14, №5. – P.481–504.

11. Ключев, В.В. Необходимые условия квалифицированной сходимости разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве / В.В. Ключев // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы II Международной научной конференции. – Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежская государственная технологическая академия», 2007. – С.94.

12. Ключев, В.В. Об условиях квалифицированной сходимости класса разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве / В.В. Ключев // Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т.36. Лобачевские чтения – 2007: Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции. – Казань: Изд–во Казанского математического общества, издательство Казанского государственного университета, 2007. – С.107–109.

13. Кокурин, М.Ю. Необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости конечно-разностных методов решения некорректной задачи Коши / М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова, Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 года. – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2008. – С.213–214.